



TITLE:

# 渦対の形成過程の数値解析 (オイラー方程式の数理: カルマン渦列と非定常渦運動100年)

AUTHOR(S):

服部, 裕司; 中野, わかな; 畠山, 望; 福本, 康秀

---

CITATION:

服部, 裕司 ...[et al]. 渦対の形成過程の数値解析 (オイラー方程式の数理: カルマン渦列と非定常渦運動100年). 数理解析研究所講究録 2012, 1776: 91-99

ISSUE DATE:

2012-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171760>

RIGHT:

## 渦対の形成過程の数値解析

東北大 流体研 服部裕司 (Yuji Hattori)

Institute of Fluid Science, Tohoku University

東北大 流体研 中野わかな (Wakana Nakano)

Institute of Fluid Science, Tohoku University

東北大 工 畠山 望 (Nozomu Hatakeyama)

Department of Chemical Engineering, Tohoku University

九大 IMI 福本康秀 (Yasuhide Fukumoto)

Institute of Math-for-Industry, Kyushu University

### Abstract

ピストンの運動により渦対が形成される過程と、その結果できる渦度分布について、数値シミュレーションにより調べた。ピストン運動や側壁を埋め込み境界法の一つである volume penalization 法により取り扱った。渦対の進行速度は、同じ循環と渦間距離をもつ点渦対よりも小さくなる。ストローク比または Reynolds 数が大きくなると渦度分布は Gauss 分布から顕著にずれる。また、楕円型不安定性の原因となるひずみ成分を捉えることに成功した。

## 1 はじめに

本研究の目的は二つある。一つは渦対の詳細な形成過程を数値計算により明らかにすることである。渦対や渦輪の形成過程は、航空機後流に形成される渦など、工業的な応用においてあらわれる渦構造形成の素過程としてさかんに研究されている。渦輪については、Didden[1] が実験により円管ノズルから流体を押し出すことにより形成される渦輪の進行速度や循環を調べた。Gharib らのグループは、一連の研究で 'formation number' などの概念を用いて、ノズルによる渦輪の形成条件を調べている [2]。一方渦対については、Laursen ら [3] の実験で 2 枚の板の間から流体を重力的に落とすことにより渦対を生成している。この実験では双極子的な渦構造が得られ、これが Lamb-Chaplygin の渦に似ていると報告している。Lewke and Williamson[4] は渦対の不安定性の研究のために、板を閉じることにより流体を押し出して渦対を形成した。この実験では速度分布が渦度を Gauss 分布としたモデルに一致するとされている。

渦度分布はしばしば Batchelor[5] の  $q$ -vortex のように Gauss 分布でモデル化されることが多い。しかし、最近の実験 [6] では  $q$ -vortex はよいモデルではなく、Moore と Saffman によるモデル [7] の方がよいという結果も得られている。渦度分布は渦構造の安定性やダイナミクスを大きく左右しうる。このため、現実的な渦形成の方法でえられる渦度分布と、渦の特性を明らかにすることには応用上大きな意義がある。しかしながら、実験では通常速度を得た後に微分して渦度を求めるが、微分により誤差が大きくなることが多く、渦度の精密な測定は困難である。これに対し、数値計算では誤差がない理想的な条件を作り出すことが可能である。

もう一つの目的は、一般に複雑形状をもつ物体や運動変形する物体が流れの中に含まれる場合の流れの数値計算方法として volume penalization 法の有効性を検証するこ

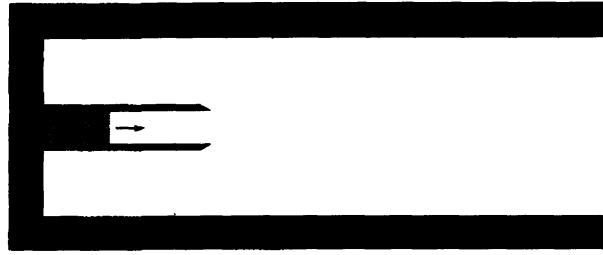


Figure 1: Sketch of the flow configuration.

とである。流れの中に物体が含まれる場合、数値流体力学 (CFD) の従来の標準的な方法の多くでは、物体表面を格子面と一致させる境界適合格子が用いられてきた。しかし、計算機性能の向上に伴い CFD で取り扱う対象範囲が拡大する中で、物体が複雑形状をもつ場合が多くなり、質のよい境界適合格子を生成することが難しくなっている。また、一般に複数の物体が独立に運動変形する場合を単一の境界適合格子で取り扱うことは困難である (しばしば重合格子が用いられるが、データの受け渡しで精度が落ちることがある)。これに対し、近年埋め込み境界法の利用が拡大している。埋め込み境界法では、必ずしも物体表面を格子面と一致させずに、単純な直交格子など扱いやすい格子系を用い、物体の存在 (境界条件) を支配方程式に適切な外力項を導入して表現する。アイデアとしては新しいものではないが、計算機性能の向上により大規模な数値シミュレーションが可能となったため、利用が広まりつつある [8]。

volume penalization 法 [9, 10] は物体を浸透率が非常に小さい多孔質媒体とみなすものであり、埋め込み境界法の一つと考えることができる。ここでは対象を非圧縮性流れに限ることとする。volume penalization 法による解は、浸透率を 0 にする極限で Navier-Stokes 方程式の解に収束することが解析的に示されている [10]。ここ十年でフランスを中心に現実的な問題への応用がさかんとなっている [11, 12, 13]。しかしながら、課題はいくつかある。その一つは物体の存在を表現するマスク関数の設定の方法である。volume penalization 法の定式化では、物体内部で 1, 外部で 0 の値をとる関数をマスク関数として定義する。が、実際に運動変形する物体を扱う場合などはスムージングが必要である。この場合の volume penalization 法による数値解の精度は不明である。

本研究では、ピストン運動による渦対形成過程の volume penalization 法による数値シミュレーションを行い、渦対形成過程を詳細にとらえると同時に、volume penalization 法の有効性を検証する。

## 2 問題設定

問題設定を Fig. 1 に示す。2 枚の板の間に 2 次元的なピストンがある。ピストンが動いて流体を押し出す際に 2 枚の板それぞれの内側から渦層が放出され、これが巻き上がって渦対を形成する。板のエッジは巻き上がりがスムーズに行われるように、鋭い角度 ( $20^\circ$ ) を持っている。実験においても、鋭いエッジが用いられている。

この問題で流れの特性を決める主なパラメタは、ピストンの動く距離と板の間隔の比であるストローク  $L/D$ , ピストンの運動速度  $U(t)$ , Reynolds 数  $Re = U_{\max} D/\nu$  である。ピストンの運動速度は短い加減速の時間を除いて一定とした。ストロークと Reynolds 数の値は、Didden[1] の渦輪の場合の値を参考にして、 $L/D = 1.4, 2.8, 5.6$ ,  $Re = 2300, 6900, 23000$  とした。

### 3 数値計算方法

2次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を volume penalization 法により解く。この方法ではペナルティ項を含む次の式を支配方程式として用いる

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{\chi}{\eta} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_b), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

(1) の右辺の最後の項がペナルティ項である。 $\chi$  は

$$\chi = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \text{rigid body}, \\ 0 & \mathbf{x} \in \text{fluid region}, \end{cases} \quad (3)$$

により定義されるマスク関数である。 $\mathbf{u}_b$  は物体の速度である。浸透率  $\eta$  は小さい値 (今回の計算では  $2 \times 10^{-4}$ ) にとる。前節の問題設定における板や壁、ピストン運動はすべてマスク関数で表現される。 $\mathbf{u}_b$  はピストン中でピストンの運動速度を与え、他では 0 とする。

空間離散化は、 $x$  方向に 6 次精度コンパクト差分、 $y$  方向に Fourier collocation 法を用いる。 $x$  方向の格子は不等間隔とし、下流は格子幅を大きくして計算領域を広くとった。時間進行は 4 次精度 Runge-Kutta 法による。非圧縮性流れの数値解法では Poisson 方程式を解く必要がある。本研究では圧力  $p$  に対する Poisson 方程式を  $y$  方向に離散 Fourier 変換したものをコンパクト差分により離散化し、得られる線形方程式を直接法により解くことで、高精度を維持する手法をとった。尚、マスク関数は上の表現ではステップ関数的であるが、Gibbs 現象による振動を防ぐため 4 格子点程度で線形的に 0 から 1 に変化するものを用いた。計算に用いた格子点数は  $2250 \times 2048$  から  $7600 \times 4096$  点である。

#### 3.1 volume penalization 法の改良

上記の方法で計算を行うと、ピストンの加減速時に流量の問題が生じる。これは、volume penalization 法では物体を浸透率が小さい多孔質として扱うためである。物体内部では (1) の主要項は圧力項とペナルティ項となり、次の Darcy 則を得る

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{u}_b - \frac{\eta}{\rho} \nabla p \quad (4)$$

この式によれば、物体内部の流速と物体の速度のずれは (1) 物体表面の圧力差が大きいとき、(2) 物体の厚みが小さいとき、(3) 浸透率  $\eta$  を小さくとれないときに大きくな

る。本研究の問題設定は、ピストンの加減速時(特に加速時)に(1)と(2)に該当する。すなわち、ピストンが流体を加速する際に板のピストン側と外側に大きな圧力差が生じ、板の厚みが小さいために浸み出しが生じる。さらに、 $L/D$  の値が大きい場合には浸み出す流量が大きくなる。

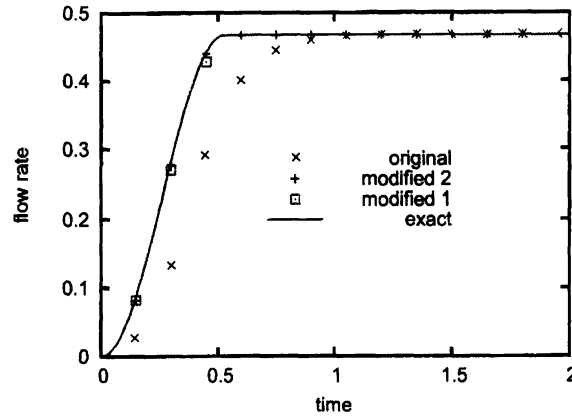


Figure 2: Flow rate.

上の問題に対し、次の二つの修正方法を考えた:

1. 修正量を前の時刻の圧力勾配から決める方法

$$\mathbf{u}'_b = \mathbf{u}_b + C \frac{\eta}{\rho} \nabla p \quad (5)$$

2. あらかじめ修正量を決めておく方法

$$\mathbf{u}'_b = \mathbf{u}_b + \mathbf{u}_{\text{corr}} \quad (6)$$

本研究の問題では加速される流体の質量が決まっていることから、板の両側での圧力差は簡単に見積もることができる。これにより修正量を定める。

どちらの方法も流量に関しては効果的であった (Fig. 2)。

## 4 計算結果

### 4.1 渦対の形成過程と修正方法の検討

Fig. 3 に修正方法 1. による渦対の形成過程の数値シミュレーション結果を等渦度線図により示す。この図では  $t = 50$  以降渦度線の本数を増やして構造を分かりやすくしている。 $t = 40$  あたりから渦層に不安定性が発生し、 $t = 80$  では渦対を構成する渦それぞれの裾野で不安定性が発達していることがわかる。計算結果の検討により、この方法では加速時にエッジ付近で不安定性が人工的に誘発されていることが分かった。

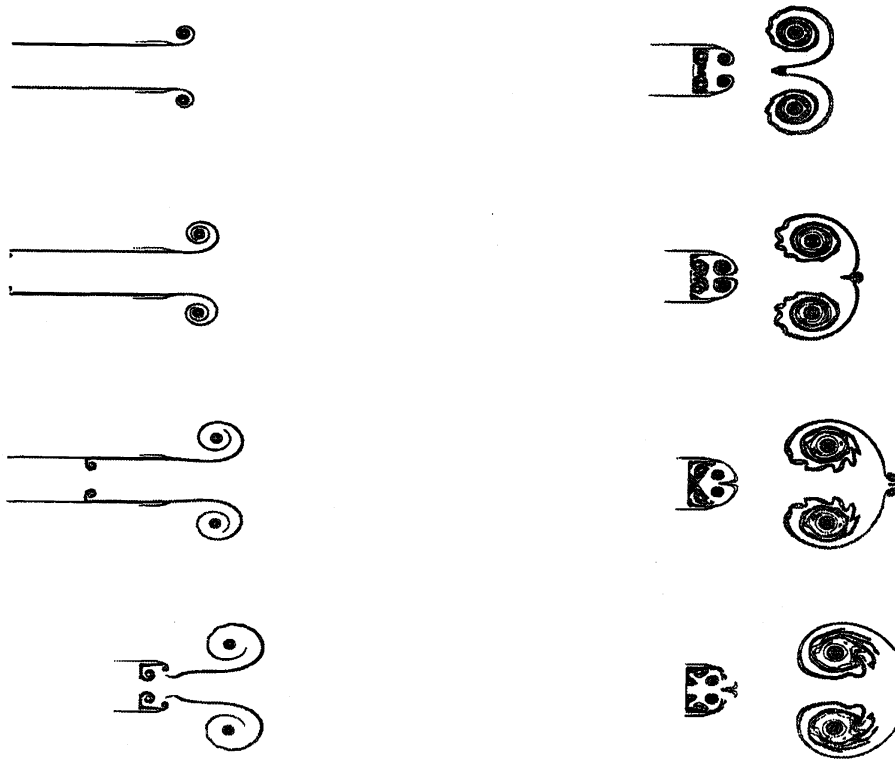


Figure 3: Formation of a vortex pair. Method 1. Contours of vorticity.  $(L/D, Re) = (5.6, 23000)$ .  $t = 10, 20, \dots, 80$ .

Fig. 4 に修正方法 2. による結果を示す。この方法では顕著な不安定性は発生していない。本研究においては、この修正方法による数値シミュレーションが妥当であると考えられる。尚、次節以降のデータは計算上の都合により、修正を適用していない方法による計算結果を用いている。

渦対の形成過程自体は、次のように説明される：まず、ピストン運動により渦層がエッジから放出され、自己相似的に巻き上がる ( $t = 10, 20, 30$ )。ピストンが停止する ( $t = 40$  の少し前) と、エッジから逆符号の 2 次渦が放出される。この 2 次渦はストローク  $L/D$  が小さいときに主渦に対し強い影響を及ぼし、主渦間の距離を小さくする。その後主渦が対を形成する。巻き上がった渦層は粘性拡散するが、その度合いは Reynolds 数の値によって異なる。Reynolds 数が高い場合拡散は遅く、スパイラル状の構造が残る。

## 4.2 渦対の特性

Fig. 5 に、主渦の循環、渦対間の距離の半値 ( $d/2$ )、渦核半径と  $d/2$  の比、渦対の進行速度と同じ循環・主渦間距離をもつ点渦対の速度の比の時間変化を示す。渦核の中心は

$$\mathbf{x}_c = \frac{\int_{D_v} \mathbf{x}_c \omega}{\int_{D_v} \omega},$$

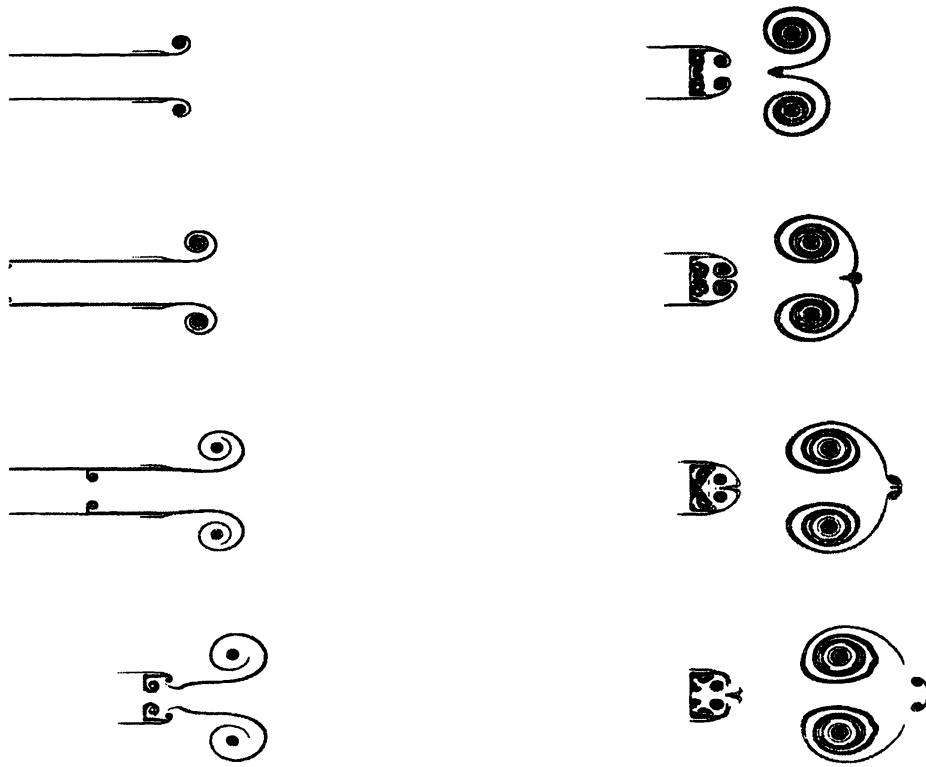


Figure 4: Formation of a vortex pair. Method 2. Contours of vorticity.  $(L/D, Re) = (5.6, 23000)$ .  $t = 10, 20, \dots, 80$ .

により定義した。ただし、領域  $D_v$  は片方の渦のみを含むようにとり、弱い反対符号の渦度を除去して計算している。循環はほぼ保存され、その値はストローク  $L/D$  にほぼ比例していることが分かる。主渦間の距離もストローク  $L/D$  によって決まる。上で述べたように、ストローク  $L/D$  が小さい場合、2次渦の影響により主渦と2次渦が対を作って対称線に向かって運動するため、主渦間の距離が小さくなっている。(c)の渦核半径と  $d/2$  の比は 0.3 から 0.7 程度の値を取っており、いずれも渦核が大きい太い渦対であることが分かる。渦対の進行速度は、同じ循環・主渦間距離をもつ点渦対の速度よりも小さい。ストローク比が大きく主渦間距離が大きい場合は、計算の都合上側壁の影響があるため、今後検討が必要である。一方、渦対の進行速度は渦核の大きさの影響を受けることが知られている。中川 [14] は摂動展開により Oseen 渦対の速度を以下のように求めた

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left\{ 1 - 8.73260 \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^4 \right\} + o(\epsilon^4).$$

この式によれば、 $\epsilon = 0.5$  のときに渦対の進行速度は対応する点渦対の速度に比して 10% 小さくなる。次節に示す渦度分布の結果も含めて、今後摂動展開の結果との詳細な比較を行う。

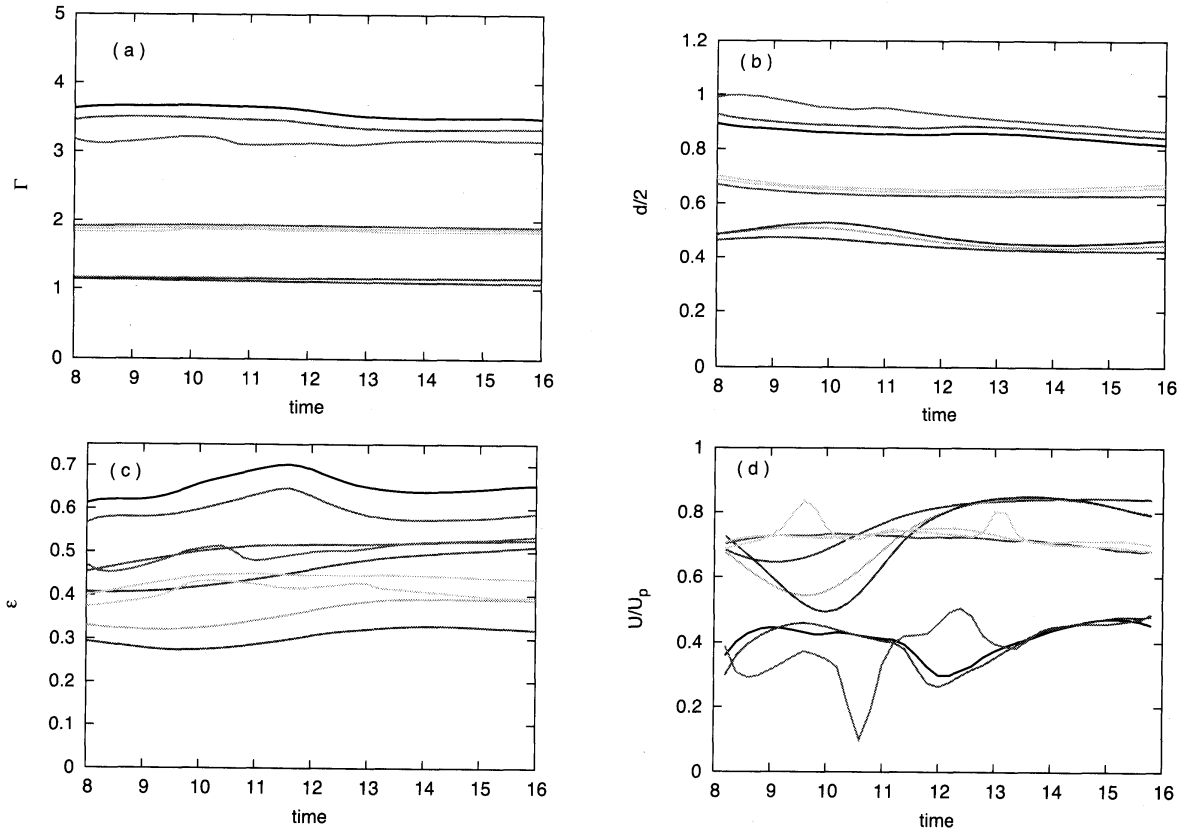


Figure 5: Time evolution of vortex pair parameters. (a) Circulation, (b) half distance between the centers, (c) ratio of the core to half distance between the centers, (d) ratio of the translational velocity to that of the point vortex pair.

### 4.3 渦度分布

主渦の渦度分布を

$$\omega(r, \theta) = \omega_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_c^{(n)}(r) \cos n\theta + \omega_s^{(n)}(r) \sin n\theta),$$

のように分解した結果を Fig. 6 に示す。\$(r, \theta)\$ は上で定義した渦核中心を原点とする極座標である。もっとも大きい \$\omega\_0(r)\$ は、\$(L/D, Re) = (1.4, 2300)\$ の場合には Gauss 分布に近いが、\$L/D\$ または \$Re\$ が大きくなると Gauss 分布からのずれが顕著となる。また \$(L/D, Re) = (1.4, 2300)\$ の場合には、非対称成分の中で相手の渦の誘導速度により生じるひずみ成分 \$\omega\_c^{(2)}\$ が見られる。

## 5 おわりに

ピストン運動による渦対の形成過程を、volume penalization 法による直接数値シミュレーションにより調べた。時間変化するマスク関数によりピストン運動を表現することで直交格子上で計算を行った。浸み出しによる流量変化に対する修正方法を検討し、



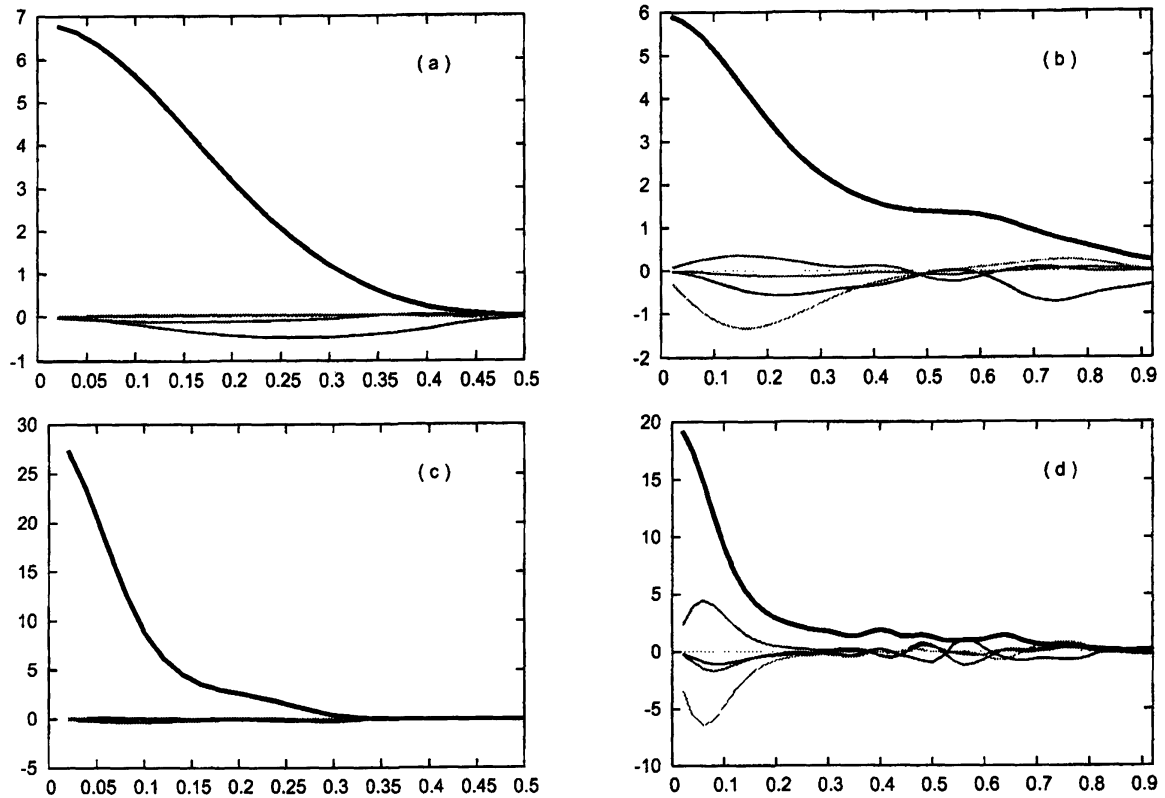


Figure 6: Decomposed vorticity distribution.  $(L/D, Re) =$  (a) (1.4, 2300), (b) (5.6, 2300), (c) (1.4, 23000), (d) (5.6, 2300).

渦対の形成過程を捉えることに成功した。形成過程の詳細を明らかにし、渦対を特徴づける諸量と渦度分布を調べた。今後、検討した修正方法による数値シミュレーションを行い、渦対の進行速度や渦度分布について、摂動展開による解析との比較検討を行う。

本研究は科研費 20540379 の援助を受けた。また、数値シミュレーションは東北大学流体科学研究所未来流体情報創造センターのベクトル並列計算機システム NEC SX-8, SX-9 を用いて行われた。

## References

- [1] N. Didden, "On the formation of vortex rings: rolling-up and production of circulation," *Z. Angew. Math. Phys.*, **30**, 101–116 (1979).
- [2] M. Gharib, E. Rambod and K. Shariff. "A universal time scale for vortex ring formation," *J. Fluid Mech.*, **360**, 121–140 (1998).

- [3] T. S. Laursen, J. J. Rasmussen, B. Stenum and E. N. Snezhkin. "Formation of a 2D vortex pair and its 3D breakup: an experimental study," *Exp. Fluids* **23**, 29–37 (1997).
- [4] T. L. Leweke and C. H. K. Williamson. "Cooperative elliptic instability of a vortex pair," *J. Fluid Mech.*, **360**, 85–119 (1998).
- [5] G. K. Batchelor, "Axial flow in trailing line vortices," *J. Fluid Mech.* **20**, 645 (1964).
- [6] C. del Pino, L. Parras, M. Felli and R. Fernandez-Feria, "Structure of trailing vortices: Comparison between particle image velocimetry measurements and theoretical models," *Phys. Fluids* **23**, 013602 (2011).
- [7] D. W. Moore and P. G. Saffman, "Axial flow in laminar trailing vortices," *Proc. R. Soc. Lond. A* **333**, 491 (1973).
- [8] R. Mittal and G. Iaccarino. "Immersed boundary methods". *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **37**: 239–261, 2005.
- [9] E. Arquis and J.P. Caltagirone. "On the hydrodynamical boundary-conditions along a fluid layer porous-medium interface - application to the case of free-convection," *C.R. Acad. Sci. Paris*, **299** (Série II), 1–4 (1984).
- [10] P. Angot, C.-H. Bruneau and P. Fabrie. "A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows," *Numer. Math.*, **81**, 497–520 (1999).
- [11] N. K.-R. Kevlahan and J. Wadsley. "Suppression of three-dimensional flow instabilities in tube bundles," *J. Fluid. Struct.*, **20**, 611–620 (2005).
- [12] D. Kolomenskiy and K. Schneider. "Numerical simulations of falling leaves using a pseudo-spectral method with volume penalization," *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **24**, 169–173 (2010).
- [13] D. Kolomenskiy, M. K. Moffatt, M. Farge and K. Schneider, "Two- and three-dimensional numerical simulations of the clap-fling-sweep of hovering insects," *J. Fluid. Struct.*, **27**, 784–791 (2011).
- [14] 中川広教, 「粘性流体中の渦対の運動速度」平成17年度九州大学大学院数理学府修士論文 (2006).